

内生无限平面网格上基于策略互动的 均衡网络结构及吸收集*

宋 丽¹ 高红伟^{1†} 陈春蕊¹ 李 康¹ 胡 平¹ 王 坤¹

摘要 在内生网络环境下, 基于局中人的策略互动研究了均衡网络的结构特性, 以及局中人策略选择的倾向性. 在动态进程的同一阶段, 规定所有局中人同时进行策略更新, 研究了网络生成的连接费用、互动支付等参数之间的相互关系及其对均衡结构或吸收集的影响. 主要贡献是将网络的内生性与无限网格上的策略互动联系在一起, 得出不同连接费用水平之下的均衡结构、吸收集的准确特征.

关键词 内生网络, 无限网格, 策略互动, 均衡结构, 吸收集

中图分类号 O225

数学分类号(2010) 91D30, 91A10

The structure of the equilibrium network and the absorbing set based on strategic interaction on the endogenous infinite lattice*

SONG Li¹ GAO Hongwei^{1†} CHEN Chunrui¹
LI Kang¹ HU Ping¹ WANG Kun¹

Abstract This paper deals with strategic interaction model based on the endogenous infinite lattice. The properties of the equilibrium and the tendency of players' strategy are the research objective. In every period of the dynamic process, players update their strategy at the same time. We study how the relationship between the cost of link formation and the payoff influences the equilibrium structure and the absorbing set. The main contribution of the paper is combining the endogenous network with the strategic interaction on the endogenous infinite lattice. We also give the accurate characteristics of the equilibrium structure and the absorbing set with different parameters.

Keywords endogenous network, infinite lattice, strategic interaction, equilibrium structure, absorbing set

Chinese Library Classification O225

收稿日期: 2012年11月20日

* 基金项目: 国家自然科学基金项目(Nos. 70871064, 71003057, 71171120); 国家自然科学基金国际(地区)合作交流项目(Nos. 71011120107, 71210307025); 山东省自然科学基金项目(No. ZR2010GQ001); 青岛大学研究生教育创新计划项目(No. QDY12017)

1. 青岛大学数学科学学院, 山东青岛, 266071; College of Mathematics, Qingdao University, Qingdao Shandong 266071, China

† 通讯作者 Corresponding author, Email: gaosai@public.qd.sd.cn

2010 Mathematics Subject Classification 91D30, 91A10

0 引 言

当今社会, 经济网络、交通网络以及物流网络在日常生活中应用极其广泛, 网络不仅能够表示信息、货物、资源的流通, 而且还可以表示人与人之间的交流与互动. 在网络中, 连接用来表示个体之间存在某种特定关系. 这些网络一般是由局中人自发形成, 网络结构表现出结点所代表的局中人之间的互动模式, 局中人之间的互动也是该网络中信息流动和传播得以实现的载体^[1].

近20年来, 国内外的学者在外生网络环境下的研究成果^[2]不断更新, 1993年Blume^[3]给出了与网络上的策略互动相关的概念, 1997年Blum和Furst^[4]在短视性的最优行为准则情形之下, 首次基于 2×2 协同对策作为互动对局, 详细比较了不同网络上的局部互动和全局互动的异同, 同时运用了Harsanyi和Selten于1988年提出的风险占优策略等相关概念. 文献[5, 6]在平面2维网络上考察了基于一般2人对策的互动、蔓延、突变及其动态.

Matthew O. Jackson和Alison Watts^[7]在2002年的文章中研究了内生网络环境中社会协同对策中的策略互动, 此时局中人在选择行动策略的同时, 被赋予了更改连接的权利, 从而使得网络环境更加灵活, 更加符合社会经济环境中人与人、集体与集体之间的交流模式. Jackson和van den Nouweland^[8]在2005年发表的文章奠定了网络生成对策的基础, 其中建立了著名的Jackson-van den Nouweland网络生成规则(JN). JN规则要求增加连接是双边的(即增加一条连接必须征得两端局中人的同意), 而删除连接是单边的(即连接两端的局中人中至少有一人同意删除所参与的连接).

在本文的模型中采用JN规则作为内生网络的生成规则, 固定每个局中人的位置及其邻居的数目, 在动态进程的每一阶段, 所有局中人同时进行策略更新. 局中人之间的策略互动只能在连接存在时才能进行, 局中人将根据建立连接所需费用与支付函数之间的关系选择最大化自己当前支付的策略. 在基本假设不变的情形下, 本文作者前期的研究工作考察了在动态进程的每一阶段有且只有一个局中人更新策略的模型^[9]. 在之前的模型中, 收敛到均衡网络结构的速度稍快, 事实上, 虽然局中人是顺次进行策略更新, 但由于策略变化的结果是所有局中人的共同知识, 因而信息更新的速度更快. 研究发现, 同样的均衡结构在两类模型中均会出现, 但是本文结果中出现的吸收集的数量更多, 而且结构更为复杂, 这是前面研究工作中未曾出现的.

相关的最新研究工作还包括, 2010年Fosco与Mengel^[10]研究了基于 2×2 囚徒困境互动对策的网络与行动选择的协同进化. 非常值得关注的, 还有2011年Sanjeev Goyal^[11]刚刚发表的一篇文章. 需要指出的是, 目前国际上在内生网络环境下针对参与者之间的策略互动、模仿和学习方面的研究工作非常缺乏, 从内生无限网络环境出发是本文工作的新颖之处.

1 基本模型

本文模型采用Jackson-van den Nouweland网络生成规则(JN)作为连接准则, 并且连接两端的局中人都要承担建立或维持连接的费用 c . 局中人在固定的位置上选择互动伙

伴, 他们之间建立连接之后进行 2×2 互动对局 Γ . 局中人的行动集合 $A = \{\alpha, \beta\}$, 局中人的支付矩阵如下:

$$\begin{matrix} & \alpha & \beta \\ \alpha & (d \ d) & (e \ f) \\ \beta & (f \ e) & (b \ b) \end{matrix},$$

其中 α 为有效行动, β 为风险占优行动. 因此支付矩阵中的参数应该满足以下不等式:

$$d > f, \quad b > e, \quad d > b, \quad d + e < b + f.$$

给定局中人集合为 $N = \{1, \dots, n, \dots\}$, 它可能是可数的. 如果局中人 i, j 之间存在连接, 记为 $\bar{g}_{ij} = 1$, 即网络是双向的. 定义 $N(i; g) \equiv \{j \in N : \bar{g}_{ij} = 1\}$, 而 $v(i; g) \equiv |N(i; g)|$ (≤ 4)为它的基. 局中人 i 选择策略 $s_i = (g_i, a_i)$, 其中 g_i 为连接的选择, a_i 为行动的选择, S_i 为局中人 i 的策略集合. $S = \prod_{i \in N} S_i$ 表示全体局中人的局势即策略组合的集合, $s = (s_1, \dots, s_i, \dots, s_n, \dots)$ 是局势的一个代表元素. 除局中人 i 之外所有局中人的策略组合记为 s_{-i} , 局中人 i 在局势 (s_i, s_{-i}) 之下的全局支付为:

$$\Pi_i(s_i, s_{-i}) = \sum_{j \in N(i; g)} \pi(a_i, a_j) - v(i; g) \cdot c.$$

其中 $\pi(a_i, a_j)$ 为二人对策 Γ 中局中人 i 选择行动 a_i 同时他的对手 j 选择行动 a_j 时局中人 i 所得到的互动支付. 局中人集合 N 、网格 g 上的策略互动、每个局中人的策略集合 S_i 以及上述支付函数共同定义了网格 g 上的策略互动对策 $\zeta(g, \Gamma)$.

定义1.1 在无限网格 g 上的策略互动对策 $\zeta(g, \Gamma)$ 中, 局势 $s^* = (s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*, \dots)$ 称为均衡的, 如果任意的局中人均无法通过单方改变自己的策略从而获取更高的全局支付, 即

$$\prod_i (s_i^*, s_{-i}^*) \geq \prod_i (s_i, s_{-i}), \quad \forall s_i \in S_i, \quad \forall i \in N.$$

下面在不同的费用水平 c 之下, 分别考察每个平面网络结构单元中位于中心位置局中人的最优行动(即当周边局中人的行动固定时, 使得中心位置局中人得到最大全局支付的行动). 事实上, 局中人的支付只与互动邻居中选择不同行动的局中人的个数有关, 与位置无关. 在下文的图形中, “●”表示行动选择为 α 的局中人, “■”表示行动为 β 的局中人. 根据互动邻居中选择行动 α (或 β)的局中人组合, 平面网格 g 上可能出现的局部互动结构单元如下:

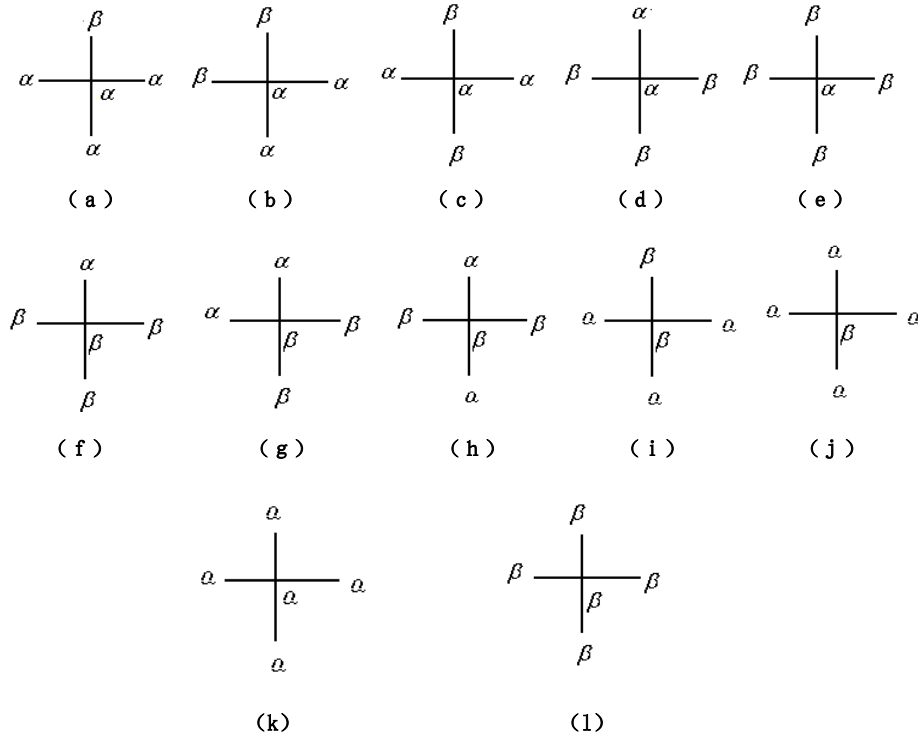


图1 平面网格g上的局部策略互动结构单元

2 主要结论

2.1 连接费 $c \in (0, e)$ 的情形

定理2.1 假设在动态进程的同阶段所有局中人同时进行策略更新, 那么当连接费用 $c \in (0, e)$ 并且支付参数满足 $\frac{b-e}{d-f+b-e} < \frac{3}{4}$ 时, 内生无限平面网格的均衡结构有以下特征:

- (a) 选择行动 α 的局中人的邻居中选择行动 α 的个数大于等于3;
- (b) 选择行动 β 的局中人的邻居中选择行动 β 的个数大于等于2;
- (c) 网格是完全连接的.

证明 首先, 当连接费用 $c \in (0, e)$ 时, 对于任意局中人来说, 只要建立连接都会获得正的收益, 因此网格是完全连接的. 下面的证明只需考虑局中人的行动选择即可.

(1) 考虑结构(a), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 3d + e - 4c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 3f + b - 4c$ 得, 若使 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) > \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$, 则有 $\frac{b-e}{d-f+b-e} < \frac{3}{4}$, 此时, 结构(i)中心位置的局中人也将会将行动选择 β 改变为 α .

(2) 考虑结构(b)、(c), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 2d + 2e - 4c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 2f + 2b - 4c$ 以及 $d + e < b + f$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) < \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是在结构(b)、(c) 中, 中心位置

的局中人会改变行动选择 α , 转而选择行动 β , 即得到结构(g)、(h).

(3)考虑结构(d), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = d + 3e - 4c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = f + 3b - 4c$ 以及 $d + e < b + f$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) < \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是在结构(d)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 α , 转而选择行动 β , 即得到结构(f).

(4)考虑结构(e), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 4e - 4c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 4b - 4c$ 以及 $e < b$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) < \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是在结构(e)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 α , 而选择行动 β , 即得到结构(l).

(5)考虑结构(j), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 4d - 4c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 4f - 4c$ 以及 $f < d$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) > \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是在结构(j)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 β , 而选择行动 α , 即得到结构(k).

综上所述, 当连接费用 $c \in (0, e)$ 及支付参数满足条件 $\frac{b-e}{d-f+b-e} < \frac{3}{4}$ 时, 在无限平面网络的均衡结构中网络是完全连接的, 并且选择行动 α 的局中人的邻居中选择行动 α 的个数大于等于3, 而选择行动 β 的局中人的邻居中选择行动 β 的个数大于等于2.

易见, 满足上述特征的网络结构有无穷多种(图2给出部分示例).

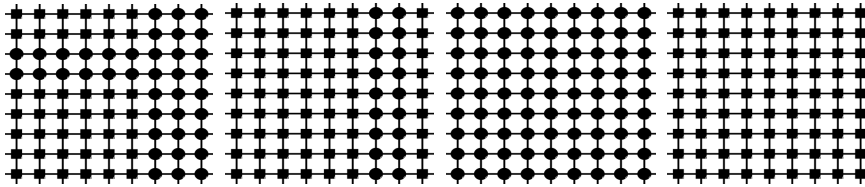
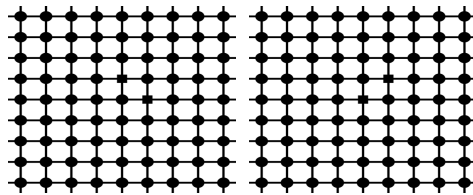


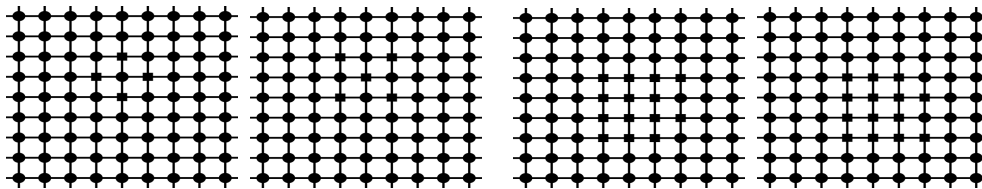
图2 $c \in (0, e)$, $\frac{b-e}{d-f+b-e} < \frac{3}{4}$ 时无限平面网络的均衡结构示例

吸收集是指某些网络构成的集合, 在网络的动态变化过程中, 网络到达这个集合并且不会再离开它, 其中的元素称为吸收状态. 如果吸收集是由单个吸收状态构成的, 那么这个状态一定是均衡的; 如果吸收集内部的状态可以相互到达, 则称之为闪烁.

在定理2.1的条件下, 吸收集的数目是无穷多个. 下面给出示例, 如:



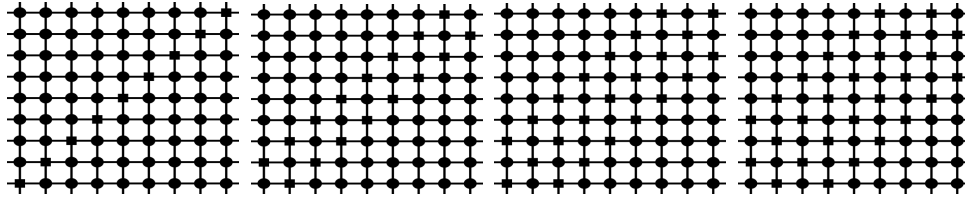
情形1 由2个网络构成的吸收集 A_1



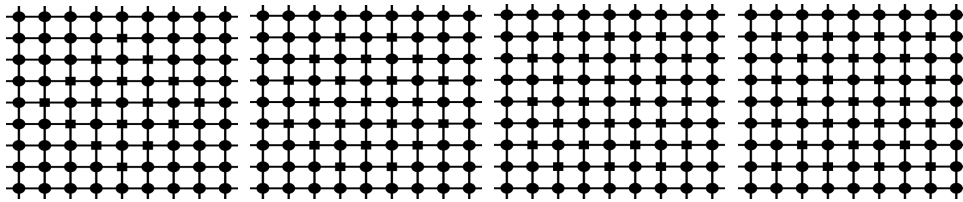
情形2 由2个网络构成的吸收集 A_2

情形3 由2个网络构成的吸收集 A_3

在动态进程中, 局中人的行动选择可能呈现出有规律的扩散或蔓延, 如下图所示:



情形1 行动选择 β 沿对角线向两侧无限蔓延



情形2 蔓延到一定的情形会停止, 呈现出在边长为最初菱形边长 $\sqrt{2}$ 倍的正方形内的闪烁

当连接费用 $c \in (0, e)$ 且参数满足条件 $\frac{b-e}{d-f+b-e} > \frac{3}{4}$ 时, 定理2.1(1)中的不等式变为 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) < \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$, 因此中心位置的局中人会改变行动选择 α , 而选择行动 β . 于是得到(见图3)

定理2.2 假设在动态进程的每一阶段所有局中人同时进行策略更新, 那么当连接费用 $c \in (0, e)$ 且支付参数满足 $\frac{b-e}{d-f+b-e} > \frac{3}{4}$ 时, 内生无限平面网格的均衡结构只有以下两种:

- (a) 所有局中人采取行动 α , 网格完全连接;
- (b) 所有局中人采取行动 β , 网格完全连接.

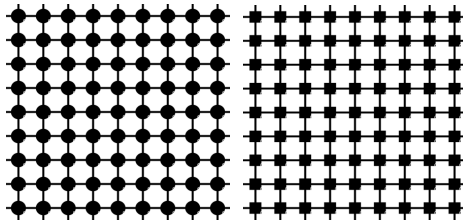


图3 $c \in (0, e)$, $\frac{b-e}{d-f+b-e} > \frac{3}{4}$ 时无限平面网格的均衡结构示例

2.2 连接费 $c \in (e, b)$ 的情形

定理2.3 假设在动态进程的每一阶段所有局中人同时进行策略更新, 那么当连接费用 $c \in (e, b)$ 及支付参数满足条件 $\frac{d-c}{d-c+b-c} < \frac{3}{4}$ 时, 内生无限平面网格的均衡结构具有以下特征:

- (a) 选择行动 α 的局中人的邻居中选择行动 α 的个数大于等于2;
- (b) 选择行动 β 的局中人的邻居中选择行动 β 的个数大于等于3;
- (c) 行动选择为 α 的局中人与行动选择为 β 的局中人之间不存在连接.

证明 当连接费用 $c \in (e, b)$, 而选择行动 α 和 β 的局中人进行策略互动时, 由选择行

动 α 的局中人获得的互动支付为 $e - c < 0$ 可得, 选择行动 α 的局中人一定会拒绝与选择行动 β 的局中人建立连接. 因为连接的建立需要双方同意, 故选择行动 α 的局中人与选择行动 β 的局中人之间不会存在连接. 针对无限平面网格 g 上可能出现的局部结构单元的考虑如下:

(1) 考虑结构(a), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 3d - 3c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = b - c$ 以及 $d > b$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) > \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 同时, 在结构(i)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 β , 转而选择行动 α .

(2) 考虑结构(b)、(c), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 2d - 2c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 2b - 2c$ 以及 $d > b$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) > \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是在结构(b)、(c)中, 中心位置的局中人会保持行动选择 α , 而在结构(g)、(h)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 β , 而选择行动 α .

(3) 考虑结构(d), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = d - c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 3b - 3c$ 得到, 当 $\frac{d-c}{d-c+b-c} < \frac{3}{4}$ 时, 会有 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) < \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是, 在结构(d)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 α , 而选择行动 β , 即得到结构(f).

(4) 考虑结构(e), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 0$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 4b - 4c$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) < \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是, 在结构(e)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 α , 而选择行动 β , 即得到结构(l).

(5) 考虑结构(j), 由 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) = 4d - 4c$, $\Pi_i((g_i, \beta), s_{-i}) = 0$ 得到 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) > \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$. 于是, 在结构(j)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 β , 而选择行动 α , 即得到结构(k).

综上所述, 当连接费用 $c \in (e, b)$ 及支付参数满足条件 $\frac{d-c}{d-c+b-c} < \frac{3}{4}$ 时, 在无限平面网格的均衡结构中行动选择为 α 的局中人与行动选择为 β 的局中人之间不存在连接, 并且选择行动 α 的局中人的邻居中选择行动 α 的个数大于等于2, 而选择行动 β 的局中人的邻居中选择行动 β 的个数大于等于3.

易见, 满足上述特征的网络结构有无穷多种(图4给出部分示例).

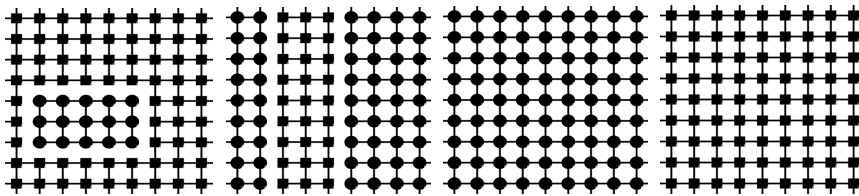
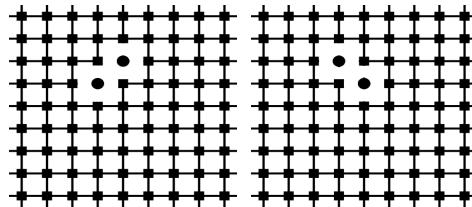
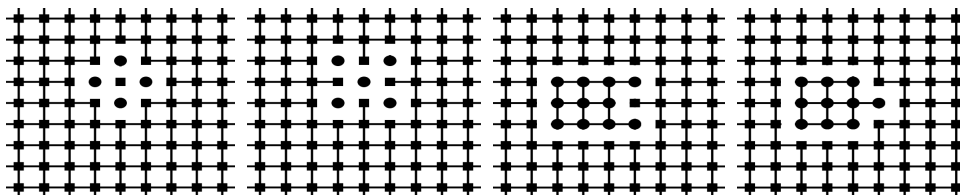


图4 $c \in (e, b)$, $\frac{d-c}{d-c+b-c} < \frac{3}{4}$ 时无限平面网格的均衡结构示例

在定理2.3的条件下, 吸收集的数目同样是无穷多的. 下面给出示例, 如:



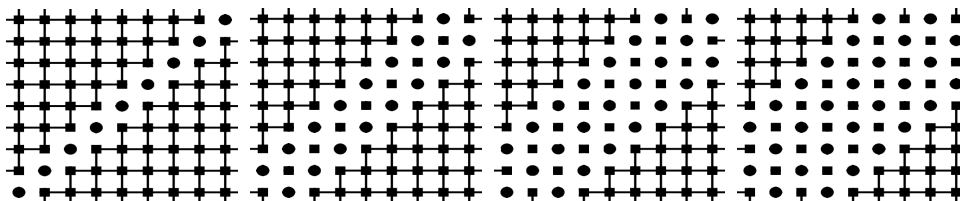
情形1 由2个网络构成的吸收集 A_4



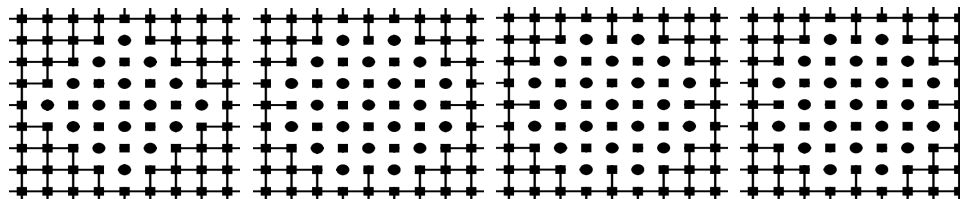
情形2 由2个网络构成的吸收集 A_5

情形3 由2个网络构成的吸收集 A_6

在动态进程中, 局中人的行动选择也可能呈现出有规律的扩散或蔓延, 如下图所示:



情形1 行动选择 α 沿对角线向两侧无限蔓延



情形2 蔓延到一定的情形会停止, 呈现出在边长为最初菱形边长 $\sqrt{2}$ 倍的正方形内的闪烁

当连接费用 $c \in (e, b)$ 且支付参数满足条件 $\frac{d-c}{d-c+b-c} > \frac{3}{4}$ 时, 定理2.3(3)中的不等式变为 $\Pi_i((g_i, \alpha), s_{-i}) > \Pi_i((g_i, \beta), s_{-i})$, 因此中心位置的局中人会保持行动选择 α , 且在结构(f)中, 中心位置的局中人会改变行动选择 β , 转而选择行动 α . 于是得到(见图5)

定理2.4 假设在动态进程的同阶段所有局中人同时进行策略更新, 那么当连接费用 $c \in (e, b)$ 及支付参数满足 $\frac{d-c}{d-c+b-c} > \frac{3}{4}$ 时, 内生无限平面网格的均衡结构只有以下两种:

- (a) 所有局中人采取行动选择 α , 网络完全连接;
- (b) 所有局中人采取行动选择 β , 网络完全连接.

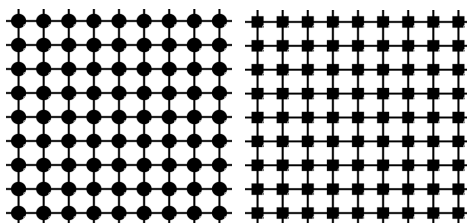


图5 $c \in (e, b)$, $\frac{d-c}{d-c+b-c} > \frac{3}{4}$ 时无限平面网格的均衡结构示例

2.3 连接费 $c \in (b, d)$ 的情形

当连接费用 $c \in (b, d)$ 时, 选择行动 α 的局中人与选择行动 β 的局中人之间一定不存在连接, 并且行动选择同为 β 的局中人之间也不存在连接. 于是得到(见图6)

定理2.5 假设在动态进程的每一阶段, 所有局中人同时进行策略更新, 当连接费用 $c \in (b, d)$ 时, 内生无限平面网络的均衡结构只有以下两种:

- (a) 所有局中人都选择行动 α , 网络完全连接;
- (b) 所有局中人都选择行动 β , 网络为空网.

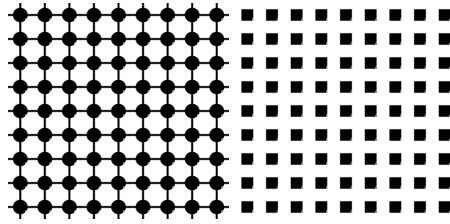


图6 $c \in (b, d)$ 时无限平面网络的均衡结构示例

2.4 连接费 $c \in (d, \infty)$ 的情形

当 $c \in (d, \infty)$ 时, 无论行动选择如何, 任何局中人之间都不会形成连接. 于是得到(见图7)

定理2.6 假设在动态进程的每一阶段, 所有局中人同时进行策略更新, 当连接费用 $c > d$ 时, 无论局中人选择行动 α 还是 β , 内生无限平面网络的均衡结构只能是空网.

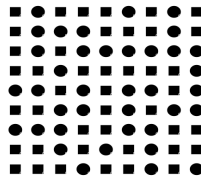


图7 $c \in (d, \infty)$ 时无限平面网络的均衡结构示例

3 结 论

内生网络环境下局中人的策略互动问题具有挑战性, 拒绝或者主动选择互动对象成为参与者互动行为选择之外的策略因素. 运用对策术语, 内生网络环境下的互动对策允许局中人在改变其行动选择的同时也能改变其自身的连接状况. 在网络经济的模式下, 企业的扩张并购、资产重组是常见的带有策略互动性质的问题, 新成员的加入意味着资源、市场以及利润的重新划分, 在一定的条件下, 新老成员之间的关系由过去的竞争与对抗可能转变为有条件的互惠互利, 从而实现个体利益的改善.

针对内生无限平面网络之上的策略互动问题, 还可以进行多方面的扩展研究, 如改变局中人互动半径、改变网络生成规则以及增加互动对局中人行动选择的数目等.

参 考 文 献

- [1] Alós-Ferrer C, Weidenholzer S. Contagion and efficiency[J]. *Journal of Economic Theory*, 2008, **143**: 251-274.
- [2] Gao H W, Yang H J, Wang G X, et al. The existence theorem of absolute equilibrium about games on connected graph with state payoff vector[J]. *Sci China Math*, 2010, **53**(6): 1483-1490.
- [3] Blume L. The statistical mechanics of strategic interaction[J]. *Games and Economic Behavior*, 1993, **5**: 387-424.
- [4] Blum A, Furst M. Fast planning through planning graph analysis[J]. *Artificial Intelligence*, 1997, **90**: 281-300.
- [5] Eshel I, Samuelson L, Shaked A. Altruists, egoists, and hooligans in a local interaction model[J]. *American Economic Review*, 1998, **88**: 157-179.
- [6] Gilman E L, Ellison J, Duke N C, et al. Threats to mangroves from climate change and adaptation options: A review[J]. *Aquatic Botany*, 2008, **89**(2): 237-250.
- [7] Jackson M, Watts A. On the formation of interaction networks in social coordination games[J]. *Games and Economic Behavior*, 2002, **41**: 265-291.
- [8] Jackson M O, van den Nouweland A. Strongly stable networks[J]. *Games and Economic Behavior*, 2005, **51**: 420-444.
- [9] Chen Chun-rui, Gao Hong-wei, Wang Gui-rong, et al. The Strategic Interaction on Endogenous Infinite Lattice and the Simulation[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2013, **268-270**: 1768-1773.
- [10] Fosco C, Mengel F. Cooperation through imitation and exclusion in networks[J]. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2011, **35**(5): 641-658.
- [11] Goyal S. Learning in networks [M]//Handbook of Social Economics. The Netherlands: North-Holland, 2011, **1**: 679-727.