变分不等式与互补问题、双层规划与平衡约束数学规划问题的若干进展*

黄正海[1] 林贵华[2] 修乃华[3,†]

摘要 考虑有限维变分不等式与互补问题、双层规划以及均衡约束的数学规划问题. 在简单介绍这些问题之后，重点介绍近年来这些领域中发展迅速的几个研究方向，包括对称锥互补问题的理论与算法、变分不等式的投影收缩算法、随机变分不等式与随机互补问题的模型与方法、双层规划以及均衡约束数学规划问题的新方法. 最后提出几个进一步研究的方向.

关键词 变分不等式, 互补问题, 双层规划, 均衡约束的数学规划问题

中图分类号 O224, O221

2010 数学分类号 90C33, 90C30, 65K05, 65K10, 65K15

Several developments of variational inequalities and complementarity problems, bilevel programming and MPEC*

HUANG Zhenghai[1] LIN Guihua[2] XIU Naihua[3,†]

Abstract This paper investigates finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems, bilevel programming problems and mathematical programs with equilibrium constraints (MPECs). After a brief introduction to these problems, this paper focuses on several recent rapidly developing aspects in these fields, which include theories and methods for symmetric cone complementarity problems, projection and contraction methods for variational inequality problems, models and methods for stochastic variational inequalities and stochastic complementarity problems, and new methods for bilevel programming problems and MPECs. Finally, several future research directions are proposed in this paper.

Keywords variational inequality, complementarity problem, bilevel programming, mathematical program with equilibrium constraints

Chinese Library Classification O224, O221

2010 Mathematics Subject Classification 90C33, 90C30, 65K05, 65K10, 65K15

收稿日期：2013年12月19日

* 基金项目：国家自然科学基金 (Nos. 10571112, 11071028, 11101248, 71271021)

1. 天津大学理学院数学系, 天津 300072; Department of Mathematics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China

2. 上海大学管理学院, 上海 200444; School of Management, Shanghai University, Shanghai 200444, China

3. 北京交通大学理学院数学系, 北京 100044; Department of Mathematics, School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China

† 通讯作者 Corresponding author, Email: nhxiu@bjtu.edu.cn

0 前 言

变分不等式与互补问题是一类具有普遍意义的均衡优化模型；平衡约束数学规划 (MPEC, Mathematical Program with Equilibrium Constraints) 是约束中含有变分不等式或互补系统的约束优化问题；双层规划 (Bilevel Programming) 是约束中包含优化问题、亦即具有上下两层结构的系统优化问题，其上层问题和下层问题都有各自的决策变量、约束条件和目标函数. 这几类问题密切相关，不仅为非线性约束优化、极大极小问题、非线性方程组、微分方程等提供了统一的理论框架，而且在管理科学、经济学、博弈论、交通运输、工程设计、最优控制等众多领域有着广泛的应用.

0.1 变分不等式与互补问题

互补问题的最早文献出现在1940年[1]，其中主要考察寻找线性不等式组的极小元，但这一工作在当时并没有引起人们的重视. 互补问题真正成为一个受关注的问题，起始于20世纪60年代初“线性规划之父”Dantzig和他的学生Cottle的研究. 1964年，Cottle[2]在其博士论文中第一次提出了求解互补问题的非线性规划算法. 变分不等式的系统研究起始于意大利数学家Stampacchia及其合作者的开创性工作[3]，他们使用变分不等式作为一个解析工具来研究自由边界问题. 虽然变分不等式与互补问题的来源不同，但后来发现，变分不等式是互补问题的一个推广，而且它们在数学性质以及应用等方面有惊人的相似之处，所以，它们经常在文献中成对出现. 自20世纪60年代中期起，变分不等式与互补问题引起了运筹学界和应用数学界的广泛关注和浓厚兴趣，很多学者加入到这一领域的研究之中，使其得到了很好的发展. 对变分不等式与互补问题的研究，一般分为理论与算法两个方面，前者主要研究解的存在性、唯一性、稳定性与灵敏度分析、解集的性质、误差界理论，以及它们与其他数学问题的联系等；后者则主要建立有效的求解方法及其算法相应的理论与数值分析.

经过50余年的发展，变分不等式与互补问题得到了长足的发展，很多漂亮的理论被建立，众多有效的算法被提出，一些新的方向不断出现. 线性互补问题的研究已经获得了丰硕的成果，20世纪90年代初的专著 [4]极大地推动了线性互补问题的普及与发展. 对于变分不等式与非线性互补问题，综述论文 [5]和专著 [6,7]对当时已获得的成果给出了很好的总结，极大地推动了变分不等式与互补问题领域的发展.

线性互补问题的理论研究密切相关于所涉及矩阵的性质，不同类型矩阵的性质是线性互补问题理论研究的基石，主要的矩阵类包括半正定矩阵、正定矩阵、$P(P_0)$矩阵、$Q(Q_0)$矩阵、Sufficient矩阵和Z-矩阵等. 借助于矩阵性质的分析，建立了线性互补问题的理论，包括解的存在性、唯一性、解集的凸性、误差界理论以及极小元素解的存在性等. 另外，通过讨论线性互补问题与很多不同问题的等价转化，一方面可为线性互补问题的理论与算法研究提供途径，另一方面也可将线性互补问题在理论与算法方面的研究成果应用于其他问题. 如：近年来由著名运筹学家Mangasarian倡导研究的线性绝对值方程组问题，不需要任何假设可以证明其等价于一个线性互补问题. 线性互补问题的算法研究成果丰富，已趋向于成熟. 早期的主要算法包括转轴算法 (直接法，具有有限终止性) 以及矩阵分裂等迭代算法 (间接法，产生无穷迭代序列). 目前较流行的方法包括内点算法、重构算法等迭代算法. 20世纪80年代，内点算法被成功地用于线性互补问题，不但获得理论上的多项式复杂性，而且得到了很好的数值计算结果. 到90年代初，线性互补问题被成功地重构成一个 (半光滑) 方程组，并且基于此提出了非内部连续化算法、光滑牛顿算法、广义 (半光滑)牛顿法和效用函数法等重构算法，这类算法具有快速收敛性质，数值计算结果好且实施方便.

变分不等式与非线性互补问题的理论研究主要包括解的存在性、唯一性、解集的非空有界性、连通性、灵敏度分析与稳定性分析、误差界理论、极小模解和极小元素解等，其中，解的存在性得到了更多的关注. 早期的存在性结果密切相关于所涉及映射的性质，包括单调性、$P(P_0, R_0)$性质、伪单调与拟单调性质、强单调性、一致P性质以及强制性条件等. 1984年，Smith在文献 [8]中首次提出了连续映射的例外序列的概念，并用以研究互补问题解的存在性. 20世纪90年代后期起，利用拓扑度为工具，很多学者对连续映射提出了更广的例外簇概念，并应用于研究变分不等式与互补问题解的存在性与解集的有界性等，得到了很多新的理论结果. 变分不等式与非线性互补问题的算法研究一直是这一领域备受关注的核心内容，主要算法包括投影法、邻近点算法、交替方向法、增广拉格朗日法、内点法和重构算法等. 投影法是求解互补问题的一类基本而重要的计算方法，它源于求解凸约束优化问题的投影梯度法. 各种投影法也被成功地应用于求解变分不等式问题. 20世纪80年代，内点算法被成功地应用于求解线性类优化与互补问题，后被延伸到求解变分不等式与非线性互补问题，一些算法在尺度李普西斯条件等假设下具有多项式复杂性. 20世纪90年代，求解线性互补问题的重构算法被延伸到求解变分不等式与非线性互补问题，包括非内部连续化算法、光滑牛顿算法、广义 (半光滑) 牛顿法和效用函数法等，算法具有快速收敛性质和有效的数值计算，且实施方便，因而广为研究，成为这一领域非常活跃的研究方向.

0.2 双层规划与MPEC

双层规划模型最早可以追溯到德国经济学家Stackelberg于1934年提出的主从博弈问题 (leader-follower game，该问题假定领导者有能力预测到追随者对其每个策略的反应，并依此选择自己的最优策略[9]，而关于双层规划的系统研究则始于Bracken与McGill的论文[10]. 双层规划是非凸优化问题，即使最简单的线性双层规划问题也已被证明是NP-难问题. 双层规划的另一个特点是，即使所涉及的函数都是有界的连续函数，也不能保证原问题存在最优解. 不难理解，与普通的单层数学规划相比，双层规划的求解要困难得多. 尽管在过去的几十年中有关双层规划的研究已经取得了很多重要的成果，但研究成果 (特别是算法方面的成果) 还主要集中于线性双层规划、凸双层规划等简单情形. 对于更一般的情形，无论在最优性等理论方面，还是在数值解法方面，都还远未到成熟的阶段，未来的路还很长. 令人可喜的是，伴随着时代的发展，双层规划在交通运输、能源政策、工程设计等领域的应用日益广泛. 我们相信，在越来越多实际问题的驱动下，关于双层规划的研究肯定会受到越来越多的关注.

MPEC与双层规划密切相关. 事实上，不论是研究双层规划问题的最优性条件，还是开发逼近算法，一般都需要把双层规划转化为单层的数学规划问题. 目前最为流行的是通过把下层问题用其最优性条件来替换的研究途径，而这样得到的单层规划问题就是MPEC. 当下层问题非凸时，按照上述途径得到的MPEC与原来的双层规划不一定等价 (即使下层问题是凸优化问题，若违背某些约束规范条件，以上二者也未必等价). 从这种意义上理解，MPEC是比双层规划应用更为广泛的一类数学规划问题. MPEC也是典型的非凸优化问题. 从几何观点来理解，MPEC的可行域一般都是若干个“片”的并集，具有显著的组合特征. 在理论上，不难证明，MPEC在其每个可行解处均不满足通常的Mangasarian-Fromovitz约束规范条件 (MFCQ)，因此，利用那些求解标准非线性规划问题行之有效的算法来求解MPEC时，计算结果往往不太稳定. 鉴于MPEC的广泛应用前景以及问题自身的极富挑战性，自20世纪80年代后期，有关MPEC的研究开始广受关注[11,12]. 经过多年来的发展，关于MPEC的近似算法已经日渐成熟，参见综述论文 [13]. 近年来，为进一步丰富MPEC理论，人们更多的开始关注MPEC的高阶最优性、稳定性及灵敏度分析等理论课

题以及像随机MPEC这样更为一般化的问题. 当然，随着研究的深入与发展，要做出富有创造性的成果变得越来越困难. 但是，计算机科学的进步以及最优化理论与方法的发展必将为研究MPEC等复杂问题提供新的工具.

1 近年来若干研究进展

1.1 对称锥互补问题的理论与算法

对称锥互补问题 (简记为SCCP) 是指在对称锥约束条件下，两组决策变量之间满足一种“互补”关系，是一类均衡优化问题. 借助于欧几里得若当代数技术[14]，近年来SCCP得到了快速的发展.

给定有限维内积空间$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，对称锥$K\subseteq V$(即$K$是$V$上的一个自对偶的闭凸锥且满足齐次性)，映射$f:V\to V$，那么标准的SCCP是寻找$x,s\in V$使得

$$x\in K,\quad s=f(x)\in K,\quad \text{且}\quad \langle x,s\rangle=0. \tag{1.1}$$

当f为线性算子时，称 (1.1)为对称锥线性互补问题，记为SCLCP；否则称其为对称锥非线性互补问题. 此外，对称锥互补问题还有混合形式、隐形式等，为了叙述的方便，本文以 (1.1) 为例进行介绍.

显然，当$V=\mathbb{R}^n$且K为$\mathbb{R}^n$的第一卦限时，SCCP退化为标准的互补问题；当$V=\mathbb{R}^n$且K为若干个二阶锥的直积 (其维数和等于n) 时，SCCP退化为二阶锥互补问题；当V为所有$n\times n$对称矩阵的集合且K为所有$n\times n$对称半正定矩阵的集合时，SCCP退化为半定互补问题. 20世纪90年代，二阶锥规划和半定规划成为国际优化领域的主要研究热点之一，半定规划被誉为“21世纪的线性规划”. 相应地，二阶锥互补问题和半定互补问题成为变分不等式与互补问题领域的研究热点. 很多有效的算法被提出，其中主要流行的算法包括内点算法和重构算法等. 目前，对于二阶锥互补问题和线性半定互补问题的研究已有较丰硕的成果，人们正在致力于非线性二阶锥互补问题和非线性半定互补问题的研究.

20世纪90年代末，Faybusovich在 [15,16]等文献中提出了求解对称锥线性规划 (SCLP) 的内点算法，引起了人们对这一领域的广泛关注. 由于对称锥线性规划的KKT条件是一个混合对称锥互补问题，因而引起了人们对对称锥互补问题的研究，并迅速成为研究热点之一，看综述论文 [17,18].

欧几里德若当代数$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle,\circ)$ (简记为V)是指，$(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$是一个定义在实数域上的有限维内积空间，$\circ:V\times V\to V$是一个满足下述条件的双线性映射：

- $x\circ y=y\circ x,\forall x,y\in V$;
- $x\circ(x^2\circ y)=x^2\circ(x\circ y),\forall x,y\in V$，其中$x^2:=x\circ x$;
- $\langle x\circ y,z\rangle=\langle x,y\circ z\rangle,\forall x,y,z\in V$.

称$x\circ y$为元素x和y的若当积. 令V是一个欧几里德若当代数，$K:=\{x^2:x\in V\}$，那么K是V上的对称锥，进一步，SCCP (1.1)可写为

$$x\in K,\quad s=f(x)\in K,\quad \text{且}\quad x\circ s=0. \tag{1.2}$$

大多数文献以此形式展开研究. 文献中，涉及在(1.2)中的映射f主要考虑的是Löwner算子[19]，很多论文讨论了Löwner算子的各种性质[19−21]；另一个考虑的具体映射是在文献[22]中引入的松弛变换，文献 [23]中讨论了松弛变换的各种性质.

如果存在一个映射$\Phi : V \times V \to V$使得

$$x \in K,\ \ s \in K,\ \ x \circ s = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(x, s) = 0,$$

那么称Φ为一个对称锥互补函数；如果存在一个映射$\Psi : V \times V \to \mathbb{R}$使得对任意的$(x, s) \in V \times V$有$\Psi(x, s) \geqslant 0$; 且$\Psi(x, s) = 0$当且仅当$(x, s)$是(1.2)的解，那么称$\Psi$为一个效用函数. 另外，对称锥互补函数一般是不可微的，可以通过引入光滑参数，构造它的光滑逼近函数，称为光滑函数. 借助于对称锥互补函数 (或光滑函数)，SCCP(1.2)可以转化为一个 (或一系列) 方程组的求解；借助于效用函数，SCCP(1.2)可以转化为一个无约束优化问题的的求解. 因此，对称锥互补问题的等价转化或光滑逼近是该领域的基本理论之一. 很多作者延伸经典的互补函数、光滑函数和效用函数到对称锥的情况；或在对称锥的框架下构造新的互补函数、光滑函数和效用函数，讨论函数的各种性质，包括光滑性、半光滑性、强制性、使用效用函数的误差界结果等[24−30]. 在理论方面，另一重要的研究内容是，引入各种P映射、Q映射，讨论单调映射、各种P映射、Q映射的性质以及它们之间的关系，借助于这些映射及其性质，讨论对称锥互补问题解的存在性、解的全局唯一性、解集的紧性等[31−35].

内点算法是求解SCCP的主要方法之一. 起始于文献 [15,16]中的研究，求解SCLP的内点算法得到了深入的研究[36−38]. 这些内点算法是基于SCLP的KKT条件来设计的，而SCLP的KKT条件是一个混合SCLCP，因此，这些算法实际是求解一类SCCP的内点算法. 基于这些论文中的分析技巧，很多求解标准互补问题的内点算法可延伸到求解SCCP，并在一定的条件下得到算法的多项式复杂性. 特别，Yoshise引入SCCP的齐次模型，并讨论了求解SCCP 的齐次内点算法[18,39,40]. 光滑算法是求解SCCP的重要方法[41,42]，具有全局收敛性和局部快速收敛性质. 使用文献 [41,42]的分析方法，近年来提出了很多求解SCCP的光滑算法，包括具有非单调线搜索的光滑算法[43]. 另外，效用函数法也是求解SCCP的一类有效算法[30,44].

以上所提到的算法均是求解单调SCCP的算法. 最近，出现了求解非单调SCCP的算法，如：文献 [45]中讨论了求解笛卡尔$P_*(\kappa)$-SCLCP的内点算法、文献 [46]中讨论了求解笛卡尔P矩阵SCLCP的内点算法、文献 [47]中讨论了求解笛卡尔$P_*(\kappa)$-SCLCP的光滑算法、文献 [48]中讨论了求解笛卡尔P_0-SCLCP的光滑算法、文献 [49]中提出了一类新的非单调映射并且讨论了求解对应SCCP的一个连续化算法. 非单调的SCCP值得进一步研究. 另外，文献 [50]中讨论了求解对称锥互补约束的规划问题的光滑算法，相关的问题值得进一步研究.

1.2 变分不等式的投影收缩算法

投影收缩算法是求解变分不等式问题的一类基本而又重要的计算方法，它源于 [51]和 [52] 的求解凸约束优化问题的投影梯度法，包括著名的外梯度法、逐点逼近法、矩阵分裂法等，已经得到了大量的研究，见著作 [6,7,53]和综述论文 [54]. 特别，何炳生[53]对投影收缩算法作出了精彩的分析与概述.

设$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$是一个闭凸集，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$是一个单调算子，单调变分不等式为

$$x^* \in \Omega,\ \ f(x^*)^{\mathrm{T}}(x - x^*) \geqslant 0,\ \ \forall x \in \Omega. \tag{1.3}$$

用$P_\Omega(u)$表示欧氏范数下点u在闭凸集Ω上的投影, 那么，对任意的$\beta>0$，(1.3) 等价于

$$x=P_\Omega(x-\beta f(x)).\tag{1.4}$$

对于给定的$\beta>0$和当前迭代点x^k，通过投影公式 (1.4) 得到检验点$\bar{x}^k=P_\Omega(x^k-\beta f(x^k))$. 如果存在一个非负函数$\phi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$和正实数$\delta$使得

$$\phi(x^k,\bar{x}^k)\geqslant\delta\|x^k-\bar{x}^k\|^2,\ \ 且\ \phi(x^k,\bar{x}^k)=0当且仅当x^k=\bar{x}^k,$$

那么称函数$\phi(\cdot,\cdot)$为一个误差度量函数; 如果存在一个函数$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$使得

$$(x^k-x^*)^{\mathrm{T}}d(x^k,\bar{x}^k)\geqslant\phi(x^k,\bar{x}^k),\quad\forall x^*\in\Omega^*((1.3)的解集),$$

那么称函数$d(\cdot,\cdot)$为一个与误差度量函数相关的有利的搜索方向. 投影收缩算法的基本思想是从当前迭代点x^k和检验点$\bar{x}^k$开始，根据一定的规则构造有利的搜索方向$d(x^k,\bar{x}^k)$，确定步长，产生离解集更近的新迭代点x^{k+1}，再利用投影公式 (1.4) 来得到新的检验点$\bar{x}^{k+1}$，依据结论“$x^{k+1}\in\Omega^*$当且仅当$x^{k+1}=\bar{x}^{k+1}$”来给出合适的终止规则.

搜索方向的构造，是设计投影收缩算法的重要环节. 通过构造不同的搜索方向，文献中提出了各种不同的投影收缩算法. 然而，研究发现：已提出的搜索方向有一些共性. 令$x^*\in\Omega^*$且$\bar{x}=P_\Omega(x-\beta f(x))$, 考虑下面的不等式：

$$\begin{cases}(\bar{x}-x^*)^{\mathrm{T}}\beta f(x^*)\geqslant 0,\\ (\bar{x}-x^*)^{\mathrm{T}}[(x-\beta f(x))-\bar{x}]\geqslant 0,\\ (\bar{x}-x^*)^{\mathrm{T}}[\beta f(\bar{x})-\beta f(x^*)]\geqslant 0.\end{cases}$$

已经证明：现有投影收缩算法的搜索方向都是以上三个基本不等式的线性组合. 另外，综合考虑搜索方向、误差度量函数等，文献中提出了收缩算法的统一框架，即对于给定的迭代点x，要求以下条件成立：

- $\bar{x}=P_\Omega(\bar{x}-(d_2(x,\bar{x})-d_1(x,\bar{x})))$;
- 存在常数$c>0$, 使得$\|d_1(x,\bar{x})\|\leqslant c\|x-\bar{x}\|$;
- 对任意的$x^*\in\Omega^*$, 有$(\bar{x}-x^*)^{\mathrm{T}}d_2(x,\bar{x})\geqslant\phi(x,\bar{x})-(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}d_1(x,\bar{x})$;
- 存在常数$\delta>0$, 使得$\phi(x,\bar{x})\geqslant\delta\|x-\bar{x}\|^2$; 并且$\phi(x,\bar{x})=0$当且仅当$x=\bar{x}$,

其中，$\bar{x}$是x的一个检验点，$\phi(\cdot,\cdot)\in\mathbb{R}$是误差度量函数，且$d_1(\cdot,\cdot),d_2(\cdot,\cdot)\in\mathbb{R}^n$是基于$x$和$\bar{x}$的一对搜索方向. 研究发现：一些现有的重要收缩算法都是统一框架下的特例，如求解单调变分不等式的投影收缩算法、邻近点算法 (PPA) 等. 另外，统一框架为构造收缩算法提供了有力的工具，见文献[55—57]等.

众所周知，约束可微凸优化问题的一阶最优性条件是一个单调变分不等式. 近年来，信息科学等诸多应用领域中，涌现了大量的大型凸优化问题，在变分不等式的框架下应用投影算法的技巧构建求解大型凸优化的一阶方法, 收敛性证明简洁，计算效果好[53]. 这为变分不等式的研究与发展提供了新的契机. 作为投影算法的重要应用，在变分不等式框架下，文献中构造性地给出了求解线性约束凸优化问题的PPA算法，极大地简化了算法的收敛性证明，有效地提高了算法的收敛速度，见文献 [58,59]等. 作为投影算法的另一个重要应用，在变分不等式框架下，构造的交替方向法 (ADM) 是求解具有可分离结构优化问

题的有效方法. 对于具有两个可分离目标的线性约束凸优化问题，近年来得到了好的研究，如延伸的ADM[60]，很大地提高了算法的效率；定制PPA算法意义的线性化ADM[61]，具有收敛率$O(1/t)$，等等. 对于具有三个或三个以上可分离目标的线性约束凸优化问题，其收缩算法研究近年来获得了大的进展. 对于这些问题，在变分不等式框架下，提出了求解多个可分离算子的凸优化问题的方法，利用回代法则，给出了基于交替方向的收缩算法. 另外，在变分不等式框架下，研究了最坏的情况下迭代次数与解的精度的关系，证明了$O(1/t)$ 的计算复杂性，相关文献见 [62–64]等.

1.3 随机变分不等式与随机互补问题

变分不等式与互补理论在日趋完善的同时也面临着越来越多的新挑战. 由于现实世界中很多问题会涉及随机因素，漠视这些随机因素将会导致决策失误，因此有必要研究随机变分不等式与随机互补问题. 所谓随机变分不等式，即求解 $x \in K$ 使得

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega \mid (y-x)^{\mathrm{T}} F(x,\omega) \geqslant 0,\ \forall\, y \in K\} = 1,$$

而随机互补问题即求解 x 使得

$$\mathcal{P}\{\omega \in \Omega \mid x \geqslant 0, F(x,\omega) \geqslant 0, x^{\mathrm{T}} F(x,\omega) = 0\} = 1.$$

不难看出，上述随机变分不等式与随机互补问题在一般情况下是无解的，因此研究随机变分不等式与随机互补问题的首要任务是建立较为合理的确定性模型，从而得到某种解决方案. 下面介绍有关随机变分不等式与随机互补问题的几种再定式.

再定式之一为文献 [65]中提出的期望值模型：求解 $x \in K$ 使得

$$(y-x)^{\mathrm{T}} E[F(x,\omega)] \geqslant 0, \quad \forall y \in K,$$

其中E表示数学期望. 文献 [65]中还进一步提出了求解上述问题的sample-path方法：假设在某种意义下函数列 $\{F^k\}$ 收敛于 $E[F(\cdot,\omega)]$，则通过求解

$$(y-x)^{\mathrm{T}} F^k(x) \geqslant 0, \quad \forall y \in K,$$

有望得到期望值模型的近似解.

再定式之二是由Chen与Fukushima在文献 [66]中提出的针对随机互补问题的期望残差极小化模型，其基本思想是首先利用NCP函数将随机互补问题化为随机方程组

$$\Phi(x,\omega) = 0, \quad \text{a. e. } \omega \in \Omega,$$

然后提出了如下模型

$$\min_{x \geqslant 0}\ E[\|\Phi(x,\omega)\|]. \tag{1.5}$$

与之相关的研究已经取得了很多重要成果. 之后，文献 [67]将这一思想推广到了随机变分不等式，其思路是利用正则化间隙函数

$$g(x,\omega) = \max_{y \in K} \Big\{ (x-y)^{\mathrm{T}} F(x,\omega) - \frac{\alpha}{2}\|x-y\|^2 \Big\},$$

将随机变分不等式转化为如下随机方程组

$$x \in K; \quad g(x,\omega) = 0, \quad \text{a. e. } \omega \in \Omega,$$

然后得出针对随机变分不等式问题的期望残差极小化模型

$$\min_{x\in K}\ E[g(x,\omega)]. \tag{1.6}$$

与(1.5)相比，(1.6)的困难之处在于正则化间隙函数较NCP函数更难处理，因此在研究上述模型的性质以及逼近算法的收敛性时要更困难.

再定式之三是由文献 [68]提出的基于风险度量CVaR的优化模型. 前述期望残差极小化模型的思路是将随机变分不等式与随机互补问题转化为随机方程组，然后求解相应的最优化问题. 基于风险度量CVaR的优化模型的主要思想则是将残差量视为损失，则期望残差极小化模型并没有考虑风险. 按照经济学理论，仅仅极小化期望损失可能会带来高风险. 有鉴于此，文献 [68]提出了如下基于风险度量CVaR的优化模型

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\ u+(1-\alpha)^{-1}E[\theta_{ab}(x,\omega)-u]_+,$$

其中 θ_{ab} 为所谓 D-gap 函数. 在适当条件下，可以证明上述模型为凸规划.

再定式之四是文献 [69]提出的针对随机互补问题的随机MPEC模型，该模型为

$$\begin{array}{ll}\min & E[d^{\mathrm{T}}z(\omega)]\\ \text{s. t.} & x\geqslant 0, F(x,\omega)+z(\omega)\geqslant 0, x^{\mathrm{T}}(F(x,\omega)+z(\omega))=0,\\ & z(\omega)\geqslant 0,\quad \omega\in\Omega\ \text{a. s.},\end{array}$$

其中$d>0$为加权向量，$z(\omega)$为补偿 (recourse)变量. 该模型是后文将要介绍的随机MPEC的一个特例.

目前关于随机变分不等式与随机互补问题的研究已经取得了很多重要的成果，更为详细的介绍可参见综述论文 [70].

1.4 双层规划

关于双层规划的早期研究主要集中在一些具有较好性质的问题上，包括求解线性双层规划的极点方法、分支定界法、序列LCP方法以及求解凸二次双层规划的下降方向法、互补转轴方法、下降方向法等. 20世纪90年代以来，人们开始更多地关注非线性双层规划，在理论与算法方面都取得了很多重要的成果.

考虑双层规划问题

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{(x,y)} & f(x,y)\\ \text{s. t.} & g(x,y)\leqslant 0,\\ & y\in S(x),\end{array} \tag{1.7}$$

其中$S(x)$表示下层问题

$$\begin{array}{ll}\min\limits_{y} & F(x,y)\\ \text{s. t.} & G(x,y)\leqslant 0\end{array} \tag{1.8}$$

的解集，而$f,F:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^p, G:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^q$均为光滑映射. 由于双层规划为非凸优化问题，因此有必要研究双层规划的最优性条件. 为此，需要首先将双层规划

转化为单层的数学规划问题. 通常有两种转化方式：一种是利用下层问题的KKT条件，即将双层规划问题(1.7)—(1.8)转化为如下MPEC来处理

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,y,u)} \quad & f(x,y) \\
\text{s. t.} \quad & g(x,y) \leqslant 0, \\
& \nabla_y F(x,y) + \nabla_y G(x,y)u = 0, \\
& u \geqslant 0, G(x,y) \leqslant 0, u^{\mathrm{T}} G(x,y) = 0.
\end{aligned}
$$

这是目前流行的方式，由此得到的最优性条件参见下一节. 然而，这种方式一般只适用于下层问题关于变量y为凸规划并且满足某些约束规范条件的情形，因此有一定的局限性. 另一种方式则利用下层问题的最优值函数将双层规划问题(1.7)—(1.8)转化为如下单层规划问题

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,y)} \quad & f(x,y) \\
\text{s. t.} \quad & g(x,y) \leqslant 0, \\
& F(x,y) - V(x) \leqslant 0, \\
& G(x,y) \leqslant 0,
\end{aligned}
$$

其中$V(x) = \min_{G(x,y)\leqslant 0} F(x,y)$. 这种方式得到的单层规划问题虽然与原问题等价，但由于最优值函数$V(\cdot)$通常为非光滑函数，因此该单层规划是非光滑优化问题，而且不满足非光滑MFCQ，一般需要更为抽象的平稳性条件来代替.

最近，Ye与Zhu在文献 [71]中将以上两种转化方式结合起来，得到了如下形式的单层规划问题

$$
\begin{aligned}
\min_{(x,y,u)} \quad & f(x,y) \\
\text{s. t.} \quad & g(x,y) \leqslant 0, \\
& F(x,y) - V(x) \leqslant 0, \\
& \nabla_y F(x,y) + \nabla_y G(x,y)u = 0, \\
& u \geqslant 0, G(x,y) \leqslant 0, u^{\mathrm{T}} G(x,y) = 0,
\end{aligned}
$$

并在更弱的条件下给出了双层规划问题的一阶最优性条件.

在上述最优性理论的基础上，人们也提出了一些求解双层规划问题的近似算法. 最流行的方法是利用下层问题的KKT条件将双层规划转化为MPEC的途径，基于此途径的近似算法请参见下一节的相关内容. 基于下层最优值函数的求解方法可参见文献 [72]，该文研究的是一类具有特殊结构的双层规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x,y) \\
\text{s. t.} \quad & x \in X, \\
& y \in \operatorname*{Argmin}_{y\in Y} F(x,y),
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

其中X, Y均为非空紧凸集. 利用下层最优值函数$V(\cdot)$，问题(1.9)等价于单层规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x,y) \\
\text{s. t.} \quad & F(x,y) - V(x) \leqslant 0, \\
& (x,y) \in X \times Y.
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

鉴于$V(\cdot)$一般都没有显式表达式 (即使有显式表达式，通常也具有非光滑性等缺陷)，文献 [72]的主要思想是引入了凝聚函数

$$\gamma_\rho(x)=\frac{1}{\rho}\log\int_Y \exp\{-\rho F(x,y)\}\mathrm{d}y,$$

其中$\rho>0$为参数. 凝聚函数γ_ρ不仅是光滑函数，而且具有如下性质

$$V(x)-\frac{1}{\rho}\log|Y|\leqslant\gamma_\rho(x)\leqslant V(x)-\frac{1}{\rho}\log\frac{|Y|}{\rho},$$

其中$|Y|$表示集合Y的勒贝格测度 (假设其非零)，因此γ_ρ是下层最优值函数的光滑逼近，这样就得到了问题(1.10)的光滑近似问题

$$\begin{array}{ll}\min & f(x,y)\\ \text{s. t.} & F(x,y)-\gamma_\rho(x)\leqslant 0,\\ & (x,y)\in X\times Y,\end{array}$$

并进一步提出了求解双层规划问题(1.9)的光滑化投影梯度算法.

另外一种求解双层规划的途径是利用直接搜索法，通常适用于部分导数信息未知或难于计算的情形. 其主要思想为给定初始解后，首先利用某种直接搜索方法进行下层迭代，然后再进行上层迭代. 特别地，文献 [73]提出了一种求解双层规划的直接搜索法，但是算法中需要将下层最优解的解析表达式带入到上层问题中. 之后，文献 [74]提出了一种针对主从问题的分布式求解算法，该算法假设不同阶段的决策者不需要互相了解对方的优化目标，并在适当条件下证明了算法的收敛性. 需要指出的是，由于直接搜索法不需要导数信息，会导致这类方法的收敛性分析比较困难，理论上的结果往往比较弱.

有关双层规划的更为详细的介绍，参见文献 [75–79].

1.5 MPEC

尽管关于MPEC的研究历史并不太长，但相关的理论和算法都已经相当完备. 值得一提的是，绝大多数有关MPEC的论文都是针对如下互补约束数学规划问题进行讨论

$$\begin{array}{ll}\min & f(x)\\ \text{s. t.} & g(x)\leqslant 0,\ \ h(x)=0,\\ & G(x)\geqslant 0, H(x)\geqslant 0, G(x)^{\mathrm{T}}H(x)=0,\end{array}\tag{1.11}$$

其中$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p, h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^q$, $G,H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$均为光滑映射，这一方面是因为互补约束相对容易处理，另一方面则是因为变分不等式约束在适当条件下可以转化为互补约束. 下面的MPEC也专指上述互补约束数学规划问题.

如前所述，MPEC为非凸优化问题. 然而，由于MPEC在其任意可行解处均不满足通常的约束规范条件，常用的KKT条件并不适用于MPEC. 鉴于此，人们从不同的角度出发，对MPEC的一阶最优性条件进行了广泛的研究，常见的包括Scheel和Scholtes在文献 [80]中提出的Clarke稳定性条件、Bouligand稳定性条件、强稳定性条件等以及Ye在文献 [81]中提出的Mordukhovich稳定性条件.

下面记$\mathcal{F}$为(1.11)的可行域，并且对任意可行解$x^* \in \mathcal{F}$，记

$$\begin{aligned}
I_g^* &= \{\, i \mid g_i(x^*) = 0\},\\
\mathcal{I}^* &= \{\, i \mid G_i(x^*) = 0 < H_i(x^*)\},\\
\mathcal{J}^* &= \{\, i \mid G_i(x^*) = 0 = H_i(x^*)\},\\
\mathcal{K}^* &= \{\, i \mid G_i(x^*) > 0 = H_i(x^*)\}.
\end{aligned}$$

定义 1.1 称$x^* \in \mathcal{F}$为 (1.11) 的Clarke稳定点 (简称C-稳定点)，如果存在乘子 $(\lambda, \mu, u, v) \in \mathbb{R}^{p+q+m+m}$满足

$$\nabla f(x^*) + \nabla g(x^*)\lambda + \nabla h(x^*)\mu - \nabla G(x^*)u - \nabla H(x^*)v = 0, \tag{1.12}$$

$$\min(\lambda, -g(x^*)) = 0, \tag{1.13}$$

$$u_i = 0, \quad i \in \mathcal{K}^*, \tag{1.14}$$

$$v_i = 0, \quad i \in \mathcal{I}^*, \tag{1.15}$$

并且有下式成立

$$u_i v_i \geqslant 0 \ \ (i \in \mathcal{J}^*).$$

称$x^* \in \mathcal{F}$为 (1.11) 的Mordukhovich稳定点 (简称M-稳定点)，如果存在乘子$(\lambda, \mu, u, v) \in \mathbb{R}^{p+q+m+m}$满足 (1.12)—(1.15) 及

$$u_i v_i = 0 \ \text{ 或 } \ u_i > 0, v_i > 0 \ \ (i \in \mathcal{J}^*).$$

称$x^* \in \mathcal{F}$为 (1.11) 的强稳定点 (简称S-稳定点)，如果存在乘子$(\lambda, \mu, u, v) \in \mathbb{R}^{p+q+m+m}$满足 (1.12)—(1.15) 及

$$u_i \geqslant 0, \ v_i \geqslant 0 \ \ (i \in \mathcal{J}^*).$$

称$x^* \in \mathcal{F}$为 (1.11) 的Bouligand稳定点 (简称B-稳定点)，如果对于指标集$\mathcal{J}^*$的任意划分$\{P, Q\}$，均存在乘子$(\lambda, \mu, u, v) \in \mathbb{R}^{p+q+m+m}$满足 (1.12)—(1.15) 及

$$u_i \geqslant 0 \ \ (i \in P); \quad v_i \geqslant 0 \ \ (i \in Q).$$

在上述的稳定性条件中，B-稳定性条件显然是最为理想的，但由于形式抽象，一般难于求解；相比较而言，强稳定性条件与M-稳定性条件一直以来都受到更多的关注. 关于MPEC的一阶最优性条件，可参见[80—84]；关于MPEC的二阶最优性条件，可参见文献 [80,85,86]. 这些最优性成果为开发求解MPEC的各种数值算法提供了可靠的理论基础.

众所周知，稳定性分析是最优化理论的重要组成部分. 有关MPEC的稳定性分析，可参见文献 [80,86–88]. 特别地，Guo等在文献 [87]中讨论了含参MPEC问题，将之视为带几何约束的含参优化问题来考虑，并在适当条件下给出了局部最优解映射以及稳定点映射均为非空值且关于扰动参数连续等稳定性结果.

下面介绍求解MPEC的数值算法. 截至目前，人们研究比较多的是松弛与光滑化途径，即对(1.11)中的互补约束引入松弛或光滑化参数，进而得到原问题的近似问题. 其中，光滑化方法由文献 [89,90]各自独立提出，其主要思想是用如下问题近似 (1.11)

$$\begin{array}{ll}
\min & f(x)\\
\text{s. t.} & g(x) \leqslant 0, \ h(x) = 0,\\
& G_i(x) \geqslant 0, H_i(x) \geqslant 0, G_i(x)H_i(x) = \varepsilon \ (i = 1, \cdots, m).
\end{array} \tag{1.16}$$

当参数$\varepsilon > 0$时，近似问题 (1.16) 在适当条件下能够满足通常的约束规范条件，因此可以利用标准的非线性规划算法来求解. 可以证明，当$\varepsilon \to 0$时，在适当条件下，(1.16) 的稳定点收敛于 (1.11) 的 (B-, S-, M-, C-) 稳定点. 随后，Scholtes在文献 [91]中将 (1.16) 更换成如下松弛问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g(x) \leqslant 0,\ h(x) = 0, \\ & G_i(x) \geqslant 0, H_i(x) \geqslant 0, G_i(x)H_i(x) \leqslant \varepsilon\ (i = 1, \cdots, m). \end{aligned} \tag{1.17}$$

文献 [92, 93]也陆续提出了一些其他形式的松弛问题. 时至今日，仍然不时有研究松弛方法的新论文发表出来. 总体来讲，利用松弛或光滑化技术来研究MPEC的方法在本质上差别并不大.

利用罚函数研究MPEC也是重要途径之一. 由于互补约束是使得MPEC异于普通非线性规划问题的根源，文献 [94]将互补约束作为惩罚项，得到了(1.11)的如下近似问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) + \rho G(x)^{\mathrm{T}} H(x) \\ \text{s. t.} \quad & g(x) \leqslant 0,\ h(x) = 0, \\ & G(x) \geqslant 0, H(x) \geqslant 0, \end{aligned}$$

其中$\rho > 0$为罚参数. 而文献 [95]则对所有约束均施加惩罚，进而得到了(1.11)的无约束优化近似. 以上两种惩罚方式具有类似的性质. 另外，与非线性规划理论相同，近似解的可行性是罚函数方法的主要问题之一，文献 [94]对此有比较详尽的讨论.

其他求解MPEC的途径还包括隐式规划途径[11,96]、序列二次规划途径[97−99]、内点法途径[11,100]和非光滑途径[13]等，限于篇幅，在此不再赘述.

上面提到的包括光滑与松弛方法、罚函数方法等在内的求解MPEC的方法，在理论上都需要求解无穷多个非线性规划问题. 下面介绍两种与此不同的方法. 一种是文献 [101]提出的识别积极集求解途径，其基本思想是基于如下事实：x^*为问题 (1.11) 的B-稳定点当且仅当x^*为其松弛问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s. t.} \quad & g(x) \leqslant 0,\ h(x) = 0, \\ & G_i(x) \geqslant 0,\ H_i(x) = 0, \quad i \in \alpha(x^*), \\ & G_i(x) = 0,\ H_i(x) = 0, \quad i \in \beta(x^*), \\ & G_i(x) = 0,\ H_i(x) \geqslant 0, \quad i \in \gamma(x^*) \end{aligned} \tag{1.18}$$

的稳定点且对应于约束条件$G_i(x) = 0, H_i(x) = 0\ (i \in \beta(x^*))$ 的乘子均为非负，其中

$$\begin{aligned} \alpha(x^*) &= \{i \mid G_i(x^*) > 0,\ H_i(x^*) = 0\}, \\ \beta(x^*) &= \{i \mid G_i(x^*) = 0,\ H_i(x^*) = 0\}, \\ \gamma(x^*) &= \{i \mid G_i(x^*) = 0,\ H_i(x^*) > 0\}. \end{aligned}$$

问题(1.18)不再含有互补约束，而且(1.11)的最优解必为其最优解. 因此，只要能够获得这些指标集$\{\alpha(x^*),\ \beta(x^*),\ \gamma(x^*)\}$，就有可能通过求解(1.18)得到(1.11)的最优解或者B-稳定

点. 基于以上事实，文献 [101]先利用 [90]提出的光滑化方法求得某个近似解x^k，然后利用某种识别函数构造出指标集$\{\alpha^k,\beta^k,\gamma^k\}$，同步求解非线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\quad & f(x)\\ \text{s. t.}\quad & g(x)\leqslant 0,\ h(x)=0,\\ & G_i(x)\geqslant 0,\ H_i(x)=0,\quad i\in\alpha^k,\\ & G_i(x)=0,\ H_i(x)=0,\quad i\in\beta^k,\\ & G_i(x)=0,\ H_i(x)\geqslant 0,\quad i\in\gamma^k.\end{aligned}$$

可以证明，在适当条件下，当k充分大时有

$$\alpha^k=\alpha(x^*),\quad \beta^k=\beta(x^*),\quad \gamma^k=\gamma(x^*)$$

成立，亦即在有限步内可以识别出目标点的积极指标集. 因此， [101]中提出的方法在适当条件下具有“有限步终止性质”.

另一种是由文献 [102]提出的直接方法. 如定义1.1所示，与普通的非线性规划不同，目前流行的MPEC稳定性条件都是含有未知指标集$\{\mathcal{I}^*,\mathcal{J}^*,\mathcal{K}^*\}$的不确定系统，无法直接求解. 文献 [102]成功地将这些不确定系统转化为如下带有简单约束的方程组

$$F(w)=0,\quad w\in W,$$

其中$F:\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^\nu$为非线性函数，而$W$是只包含某些非负约束的简单集合. 文献 [102]还在前人工作的基础上进一步提出了求解上述约束方程组的修正Levenberg-Marquardt方法，并证明了该方法在适当的误差界条件下具有全局超线性收敛性.

最后简单介绍有关随机MPEC的研究进展. 众所周知，现实世界中常常会不可避免地受到不确定性因素的影响，因此有必要研究随机MPEC. MPEC处理起来已经相当困难，随机MPEC则更为复杂. 对于随机MPEC，首要的课题是如何建立模型才能得到合理的解. 不同的情形，不同的角度，建立的模型一般也不同. 目前关于随机MPEC主要有如下四个确定性模型：

- 下层 Wait-and-see 模型[103].

$$\begin{aligned}\min\quad & E[f(x,y(\omega),\omega)]\\ \text{s. t.}\quad & g(x)\leqslant 0,h(x)=0,\\ & y(\omega)\geqslant 0,F(x,y(\omega),\omega)\geqslant 0,y(\omega)^{\mathrm{T}}F(x,y(\omega),\omega)=0,\ \omega\in\Omega\ \text{ a. s.},\end{aligned}$$

  其中x为上层变量，$y(\omega)$为下层变量 (仅表示依赖关系，而非函数关系)，Ω表示样本空间. 该模型意味着上层决策者需要即时做出决策，而下层决策者可以等到随机信息比较明朗后再作决策.

- 带补偿的 Here-and-now 模型[104].

$$\begin{aligned}\min\quad & E[f(x,y,\omega)+d^{\mathrm{T}}u(\omega)]\\ \text{s. t.}\quad & g(x)\leqslant 0,h(x)=0,\\ & y\geqslant 0,F(x,y,\omega)+u(\omega)\geqslant 0,y^{\mathrm{T}}(F(x,y,\omega)+u(\omega))=0,\\ & u(\omega)\geqslant 0,\quad \omega\in\Omega\ \text{ a. s.},\end{aligned}$$

  其中$d>0$为加权向量，$u(\omega)$为补偿 (recourse)变量. 该模型意味着上层决策者与下层决策者均须即时做出决策.

- 不带补偿的 Here-and-now 模型[105].

$$\begin{array}{ll} \min & E[f(x,y,\omega)] \\ \text{s. t.} & g(x) \leqslant 0, h(x)=0, \\ & y \geqslant 0, E[F(x,y,\omega)] \geqslant 0, y^{\mathrm{T}} E[F(x,y,\omega)]=0. \end{array}$$

- 多选择混合模型[106].

$$\begin{array}{ll} \min & E[F(x,y,z(\omega),\omega)] \\ \text{s. t.} & g(x) \leqslant 0, h(x)=0, \\ & y \geqslant 0, E[G(x,y,z(\omega),\omega)] \geqslant 0, y^{\mathrm{T}} E[G(x,y,z(\omega),\omega)]=0, \\ & z(\omega) \geqslant 0, H(x,y,z(\omega),\omega) \geqslant 0, z(\omega)^{\mathrm{T}} H(x,y,z(\omega),\omega)=0,\ \omega \in \Omega \ \text{ a. s.,} \end{array}$$

  其中$y, z(\omega)$均为下层变量. 该模型意味着上层决策者需要即时做出决策，而下层决策者既可以即时做决策 (对应y部分)，也可以等到随机信息比较明朗后再作决策 (对应$z(\omega)$部分).

与确定性MPEC相比，随机MPEC模型中通常都包含数学期望，约束中则既有互补约束，也可能包含随机约束. 对于数学期望或随机约束，最流行的处理方法是利用 (拟) 蒙特卡罗方法进行近似逼近. 对于互补约束，处理方法可参考前面有关确定性MPEC的部分. 特别值得一提的是，对随机MPEC的各种近似算法进行收敛性分析时要用到概率工具，收敛性结果往往也是概率收敛. 目前关于上述几个随机MPEC模型都已经有不少相关的工作，更为详细的介绍可参见综述论文 [70].

2 进一步研究的方向

2.1 变分不等式与非线性互补问题

传统变分不等式与互补问题的理论与算法已经得到了很好的研究，趋于完善. 发展趋势之一是探讨更广模型的理论与算法，如广义变分不等式问题、锥互补问题等，这些问题涵盖面广，意义重大，但研究难度大，亟待人们去探索. 另一个发展趋势是问题驱动的模型研究，即具有重大应用背景的数学问题的理论与算法研究，以解决重要实际问题. 谨在此列举一些研究方向和问题供大家参考：

- 锥互补问题. 非线性二阶锥互补问题、非线性半定互补问题、对称锥互补问题等的理论与算法研究，近年来得到了较快的发展，但远未完善，值得进一步探讨. 另外，更广的锥互补问题，如齐次锥互补问题、双曲锥互补问题等，目前的成果较少，尚待进一步研究.

- 大规模互补与变分不等式问题. 人们面临的问题越来越复杂，描述很多问题的数据量急剧增加，大数据时代已经来临. 由于很多实际问题可以模型化为互补与变分不等式问题，因而，大规模互补与变分不等式问题的理论与算法研究具有重要的意义和应用价值.

- 稀疏解问题. 压缩传感的思想是以少量的采样来获取高维的稀疏信息，由于很多实际问题的刻画具有稀疏性特征，所以压缩传感的思想已被广泛地应用于解决很多重

要的实际问题，其核心体现在数学上就是找某个模型的稀疏解. 很多实际问题可模型化为变分不等式与互补问题，因此，探讨变分不等式与互补问题的稀疏解的理论与算法，具有重要意义.

- 不确定信息下的变分不等式与互补问题. 已有研究中主要考虑所涉及参数 (数据) 是确定的问题；然而在实际问题的建模中所涉及的参数往往难以精确得到. 根据实际问题的需要，参数的不确定性可以通过不同的方式来刻画，如概率分布、扰动集等，不同的刻画导致不同的问题模型. 因此，探讨不确定信息下的变分不等式与互补问题的模型、理论、算法等具有重要的理论意义和实际应用价值.

2.2 双层规划与MPEC

随着时代的发展，双层规划与MPEC等复杂数学规划问题的应用将会越来越广泛，因此对这些问题的理论与算法等的需求也会越来越迫切. 谨在此列举一些研究方向和问题供大家参考：

- 双层规划问题. 对于非凸优化问题，最优性理论是进行收敛性分析的基础. 目前关于双层规划的一阶最优性条件已经有了一些，但还没有和算法进行有机结合，而高阶最优性条件还需要去研究. 此外，关于含参双层规划问题的稳定性与灵敏度分析也还没有人去进行较为系统的研究. 理论研究之外，关于算法的研究应该是未来的主要目标. 当然，算法方面要一步到位也不现实，可以优先考虑某些具有特殊结构的问题.
- 悲观双层规划问题. 前面提到的双层规划是指所谓“乐观双层规划模型”，即下层决策者与上层决策者采取合作策略的情形. 对于下层决策者不采取合作策略的所谓“悲观双层规划模型”，乐观模型的理论与方法并不能直接应用. 关于悲观双层规划的研究是一个很有挑战性的课题.
- MPEC. 关于MPEC的最优性理论已经相当丰富，但与之相关的灵敏度分析、MPEC的对偶理论等方面的成果还不多见，值得去研究. 另外，带均衡约束的广义纳什均衡问题、带二阶锥互补约束的最优化问题等比MPEC应用更为广泛的问题在近年来已经开始受到人们的关注. 借助于MPEC方面所取得的成果，对上述广义的问题进行理论及算法的研究应该是前景可期.
- 不确定信息下的MPEC. 关于随机MPEC的模型研究仍有待进一步完善，像带机会约束的随机MPEC、鲁棒MPEC等，都可以找到相应的应用背景，非常值得去进一步研究和探讨.

参 考 文 献

[1] Val P Du. The unloading problem for plane curves [J]. *American Journal of Mathematics*, 1940, **62**: 307-311.

[2] Cottle R W. Nonlinear programs with positively bounded jacobians [D]. California: University of California, 1964.

[3] Hartman P, Stampacchia G. On some nonlinear elliptic differential functional equations [J]. *Acta Mathematica*, 1966, **115**: 153-188.

[4] Cottle R W, Pang J S, Stone R E. *The Linear Complementarity Problem* [M]. Boston: Academic Press, 1992.

[5] Harker P T, Pang J S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems: a survey of theorey, algorithms and applications [J]. *Mathematical Programming*, 1990, **48**: 161-220.

[6] Facchinei F, Pang J S. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems* [M]. New York: Springer-Verlag, 2003.

[7] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海: 上海科技出版社, 2006.

[8] Smith T E. A solution condition for complementarity problem: with application to spatial price equilibrium [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1984, **15**: 61-69.

[9] Stackelberg H V. *The Theory of the Market Economy* [M]. Oxford: Oxford University Press, 1952.

[10] Bracken J, McGill J. Mathematical programs with optimization problems in the constraints [J]. *Operations Research*, 1973, **21**: 37-44.

[11] Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[12] Outrata J, Kocvara M, Zowe J. *Nonsmooth Approach to Optimization Problems with Equlilibrium Constraints: Theory, Applications, and Numerical Results* [M]. Dordrect: Kluwer Academic Publisher, 1998.

[13] Fukushima M, Lin G H. Smoothing methods for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Proceedings of Informatics Research for Development of Knowledge Society Infrastructure*, 2004, 206-213.

[14] Faraut J, Korányi A. *Analysis on Symmetric Cones* [M]. Oxford: Oxford University Press, 1994.

[15] Faybusovich L. Euclidean Jordan algebras and interior-point algorithms [J]. *Positivity*, 1997, **1**: 331-357.

[16] Faybusovich L. Linear systens in Jordan algebras and primal-dual interior algorithms [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1997, **86**: 149-175.

[17] 修乃华, 韩继业. 对称锥互补问题 [J]. 数学进展，2007, **36**(1): 1-12.

[18] Yoshise A. Complementarity problems over symmetric cones: a survey of recent developments in several aspects [M]//Anjos M F, Lasserre J B (eds.). *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*, NewYork: Springer-Verlag, 2012, **166**: 339-375.

[19] Sun D, Sun J. Löwner’s operator and spectral functions in Euclidean Jordan algebras [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2008, **33**: 421-445.

[20] Kong L, Tunçel L, Xiu N. Clarke generalized Jacobian of the projection onto symmetric cones [J]. *Set-Valued and Variational Analysis*, 2009, **17**: 135-151.

[21] Kong L, Tunçel L, Xiu N. Monotonicity of Löwner operators and its applications to symmetric cone complementarity problems [J]. *Mathematical Programming*, 2012, **133**: 327-336.

[22] Tao J, Gowda M S. Some P-properties for nonlinear transformulation on Euclidean Jordan algebras [J]. *Mathematics of Operations Research*. 2005, **30**: 985-1004.

[23] Lu N, Huang Z H, Han J. Properties of a class of nonlinear transformations over Euclidean Jordan algebras with applications to complementarity problems [J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2009, **30**: 799-821.

[24] Chang Y L, Chen J S, Pan S H. Strong semismoothness of Fischer-Burmeister complementarity function associated with symmetric cones [J]. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 2012, **13**: 799-806.

[25] Han D. On the coerciveness of some merit functions for complementarity problems over symmetric cones [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, **336**: 727-737.

[26] Kum S H, Lim Y D. Coercivity and strong semismoothness of the penalized Fischer-Burmeister function for the symmetric cone complementarity problem [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, **142**: 377-383.

[27] Kong L, Xiu N. New smooth C-functions for symmetric cone complementarity problems [J]. *Optimization Letters*, 2007, **1**: 391-400.

[28] Liu Y, Zhang L, Wang Y. Some properties of a class of merit functions for symmetric cone complementarity problems [J]. *Asia-Pacfic Journal of Operations Research*, 2006, **23**: 473-496.

[29] Miao X H, Chen J S. Error bounds for symmetric cone complementarity problems [J]. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2013, **3**: 627-641.

[30] Pan S, Chen J S. Growth behavior of two classes of merit functions for symmetric cone complementarity problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, **141**: 167-191.

[31] Gowda M S, Sznajder R, Tao J. Some P-properties for linear transformations on Euclidean Jordan algebras [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2004, **393**: 203-232.

[32] Gowda M S, Tao J. Some P-properties for nonlinear transformations on Euclidean Jordan algebras [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2005, **30**: 985-1004.

[33] Gowda M S, Sznajder R. Automorphism invariance of P and GUS properties of linear transformations on Euclidean Jordan algebras [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2006, **31**: 109-123.

[34] Gowda M S, Sznajder R. Some global uniqueness and solvability results for linear complementarity problems over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2007, **18**: 461-481.

[35] Tao J. Strict semimonotonicity property of linear transformations on Euclidean Jordan algebras [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2010, **144**: 575-596.

[36] Rangarajan B K. Polynomial convergence of infeasible-interior-point methods over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2006, **16**: 1211-1229.

[37] Schmieta S H, Alizadeh F. Associative and Jordan algebras, and polynonial time interior-point algorithms for symmetrc cones [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2001, **26**: 543-564.

[38] Schmieta S H, Alizadeh F. Extension of primal-dual interior-point algorithm to symmetric cones [J]. *Mathematical Programming*, 2003, **96**: 409-438.

[39] Yoshise A. Interior point trajectories and a homogeneous model for nonlinear complementarity problems over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2006, **17**: 1129-1153.

[40] Yoshise A. Homogeneous algorithms for monotone complementarity problems over symmetric cones [J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2009, **5**: 313-337.

[41] Huang Z H, Ni T. Smoothing algorithms for complementarity problems over symmetric cones [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2010, **45**: 557-579.

[42] Kong L, Sun J, Xiu N. A regularized smoothing Newton method for symmetric cone complementarity problems [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2008, **19**: 1028-1047.

[43] Huang Z H, Hu S L, Han J. Global convergence of a smoothing algorithm for symmetric cone complementarity problems with a nonmonotone line search [J]. *Science in China Series A: Mathematics*, 2009, **52**: 833-848.

[44] Pan S, Chen J S. A one-parametric class of merit functions for the symmetric cone complementarity problem [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2009, **355**: 195-215.

[45] Luo Z, Xiu N. Path-following interior point algorithms for the Cartesian $P_*(\kappa)$ LCP over symmetric cones [J]. *Science in China Series A : Mathematics*, 2009, **52**: 1769-1784.

[46] Wang G Q, Bai Y Q. A class of polynomial interior point algorithms for the Cartesian P-matrix linear complementarity problem over symmetric cones [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2012, **152**: 739-772.

[47] Huang Z H, Lu N. Global and global linear convergence of a smoothing algorithm for the Cartesian $P_*(\kappa)$-SCLCP [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2012, **8**: 67-86.

[48] Lu N, Huang Z H. A smoothing Newton algorithm for a class of non-monotonic symmetric cone linear complementarity problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Doi: 10.1007/s10957-013-0436-z.

[49] Chua C B, Yi P. A continuation method for nonlinear complementarity problems over symmetric cones [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**: 2560-2583.

[50] Yan T, Fukushima M. Smoothing method for mathematical programs with symmetric cone complementarity constraints [J]. *Optimization*, 2011, **60**: 113-128.

[51] Goldstein A A. Convex programming in Hilbert space [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1976, **70**: 709-710.

[52] Levitin E S, Polyak B T. Constrained minimization problems [J]. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1966, **6**: 1-50.

[53] 何炳生. 凸优化和单调变分不等式的收缩算法 [EB/OL]. [2013-11-13]. http://math.nju.edu.cn/hebma/.

[54] Xiu N H, Zhang J Z. Some recent advances in projection-type methods for variational inequalities [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, **152**: 559-585.

[55] He B S. A new method for a class of linear variational inequalities [J]. *Mathematical Programming*, 1994, **66**: 137-144.

[56] He B S, Liao L Z, Wang X. Proximal-like contraction methods for monotone variational inequalitiesin a unified framework I: effective quadruplet and primary methods [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2012, **51**: 649-679.

[57] He B S, Liao L Z, Wang X. Proximal-like contraction methods for monotone variational inequalities in a unified framework II: General methods and numerical experiments [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2012, **51**: 681-708.

[58] He B S, Yuan X M. A contraction method with implementable proximal regularization for linearly constrained convex programming [EB/OL]. [2013-10-25]. http://www.optimization-online.org/DB HTML/2010/11/2817.html.

[59] He B S, Yuan X M. Convergence analysis of primal-dual algorithms for a saddle-point problem: From contraction perspective [J]. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2012, **5**: 119-149.

[60] Ye C H, Yuan X M. A descent method for structured monotone variational inequalities [J]. *Optimization Methods and Software*, 2007, **22**: 329-338.

[61] Cai X J, Gu G Y, He B S, et al. A relaxed customized proximal point algorithm for separable convex programming [EB/OL]. [2013-10-20]. http://www.optimization-online.org/DB HTML/2011/08/3141.html.

[62] He B S, Tao M, Yuan X M. Alternating direction method with Gaussian back substitution for separable convex programming [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, **22**: 313-340.

[63] He B S, Yuan X M. On the $O(1/t)$ convergence rate of the alternating direction method [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2012, **50**: 700-709.

[64] He B S, Yuan X M. Linearized Alternating Direction Method with Gaussian Back Substitution for Separable Convex Programming [EB/OL]. [2013-10-23]. http://www.optimization-online.org/DB HTML/2011/10/3192.html.

[65] Gürkan G, Özge A Y, Robinson S M. Sample-path solution of stochastic variational inequalities [J]. *Mathematical Programming*, 1999, **84**: 313-333.

[66] Chen X, Fukushima M. Expected residual minimization method for stochastic linear complementarity problems [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2005, **30**: 1022-1038.

[67] Luo M J, Lin G H. Expected residual minimization method for stochastic variational inequality problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2009, **140**: 103-116.

[68] Chen X, Lin G H. CVaR-based formulation and approximation method for stochastic variational inequalities [J]. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2011, **1**: 35-48.

[69] Lin G H, Fukushima M. New reformulations and smoothed penalty method for stochastic nonlinear complementarity problems [J]. *Optimization Methods and Software*, 2006, **21**: 551-564.

[70] Lin G H, Fukushima M. Stochastic equilibrium problems and stochastic mathematical programs with equilibrium constraints: a survey [J]. *Pacific Journal of Optimization*, 2010, **6**: 455-482.

[71] Ye J J, Zhu D L. New necessary optimality conditions for bilevel programs by combining MPEC and the value function approach [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**: 1885-1905.

[72] Lin G H, Xu M, Ye J J. On solving simple bilevel programs with a nonconvex lower level program [J]. *Mathematical Programming*, Doi: 10.1007/s10107-013-0633-4.

[73] Mersha A G, Dempe S. Direct search algorithm for bilievel programming problems [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2011, **49**: 1-15.

[74] Zhang D, Lin G H. Bilevel direct search method for leader-follower problems and application in health insurance [J]. *Computers and Operations Research*, 2014, **41**: 359-373.

[75] Bard J F. *Practical Bilevel Optimization, Nonconvex Optimization and its Applications* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[76] Colson B, Marcotte P, Savard G. An overview of bilevel programming [J]. *Annals of Operations Research*, 2007, **153**: 235-256.

[77] Dempe S. Annotated bibliography on bilevel programming and mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Optimization*, 2003, **52**: 333-359.

[78] Dempe S. *Foundations of Bilevel Programming, Nonconvex Optimization and its Applications* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[79] Shimizu K, Ishizuka Y, Bard J F. *Nondifferentiable and Two-level Mathematical Programming* [M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1997.

[80] Scheel H S, Scholtes S. Mathematical programs with complementarity constraints: Stationarity, optimality and sensitivity [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2000, **25**: 1-22.

[81] Ye J J. Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2005, **307**: 350-369.

[82] Guo L, Lin G H. Notes on some constraint qualifications for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2013, **156**: 600-616.

[83] Kanzow C, Schwartz A. Mathematical programs with equilibrium constraints: Enhanced Fritz John conditions, new constraint qualifications and improved exact penalty results [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2010, **20**: 2730-2753.

[84] Ye J J, Ye X Y. Necessary optimality conditions for optimization problems with variational inequality constraints [J]. *Mathematics of Operations Research*, 1997, **22**: 977-997.

[85] Guo L, Lin G H, Ye J J. Second order optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2013, **158**: 33-64.

[86] Izmailov A F. Mathematical programs with complementarity constraints: regularity, optimality conditions and sensitivity [J]. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, **44**: 1145-1164.

[87] Guo L, Lin G H, Ye J J. Stability analysis for parametric mathematical programs with geometric constraints and its applications [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2012, **22**: 1151-1176.

[88] Jongen H Th, Shikhman V, Steffensen S. Characterization of strong stability for C-stationary points in MPCC [J]. *Mathematical Programming*, 2012, **132**: 295-308.

[89] Facchinei F, Jiang H, Qi L. A smoothing method for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Mathematical Programming*, 1999, **85**: 107-134.

[90] Fukushima M, Pang J S. Convergence of a smoothing continuation method for mathematical problems with complementarity constraints [M]//Théra M, Tichatschke R (eds.). *Ill-posed Variational Problems and Regularization Techniques*, Berlin: Springer-Verlag, 1999, **477**: 99-110.

[91] Scholtes S. Convergence properties of a regularization scheme for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2001, **11**: 918-936.

[92] Izmailov A F, Solodov M V. An active-set Newton method for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2008, **19**: 1003-1027.

[93] Lin G H, Fukushima M. A modified relaxation scheme for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Annals of Operations Research*, 2005, **133**: 63-84.

[94] Hu X, Ralph D. Convergence of a penalty method for mathematical programming with equilibrium constraints [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2004, **123**: 365-390.

[95] Huang X X, Yang X Q, Zhu D L. A sequential smooth penalization approach to mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 2006, **27**: 71-98.

[96] Chen X, Fukushima M. A smoothing method for a mathematical program with P-matrix linear complementarity constraints [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2004, **27**: 223-246.

[97] Fletcher R, Leyffer S, Ralph D, et al. Local convergence of SQP methods for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2006, **17**: 259-286.

[98] Fukushima M, Luo Z Q, Pang J S. A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints [J]. *Computational Optimization and Applications*, 1998, **10**: 5-34.

[99] Jiang H, Ralph D. Smooth methods for mathematical programs with nonlinear complementarity constraints [J]. *SIAM Journal on Optimization*, 2000, **10**: 779-808.

[100] Liu X, Sun J. Generalized stationary points and an interior-point method for mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Mathematical Programming*, 2004, **101**: 231-261.

[101] Lin G H, Fukushima M. Hybrid approach with active set identification for mathematical programs with complementarity constraints [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2006, **128**: 1-28.

[102] Guo L, Lin G H. Globally convergent algorithm for solving stationary points for mathematical programs with complementarity constraints via nonsmooth reformulations [J]. *Journal of Industrial and Management Optimization*, 2013, **9**: 305-322.

[103] Patriksson M, Wynter L. Stochastic mathematical programs with equilibrium constraints [J]. *Operations Research Letters*, 1999, **25**: 159-167.

[104] Lin G H, Chen X, Fukushima M. Solving stochastic mathematical programs with equilibrium constraints via approximation and smoothing implicit programming with penalization [J]. *Mathematical Programming*, 2009, **116**: 343-368.

[105] Birbil S I, Gürkan G, Listes O. Solving stochastic mathematical programs with complementarity constraints using simulation [J]. *Mathematics of Operations Research*, 2006, **31**: 739-760.

[106] Liu Y, Zhang J, Lin G H. Stochastic mathematical programs with hybrid equilibrium constraints [J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2011, **235**: 3870-3882.